Analyse Complexe

ERII 3

2012-2013

L'analyse complexe est un domaine des mathématiques traitant des fonctions à valeurs complexes (ou, plus généralement, à valeurs dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) et qui sont dérivables par rapport à une ou plusieurs variables complexes.

POLYTECH®
MONTPELLIER

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions Complexes de Variables Complexes

1.1 Rappels sur les nombres complexes

On écrit $|z|$ la norme du nombre complexe z dans $\mathbb{C}$. De fait, l'application

$$(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \to d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

est une distance.

Un nombre complexe est à l'origine un **couple de réels** et on lui associe les **opérations élémentaires** :
- l'addition : $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = \big(x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2\big)$
- la multiplication : $(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = \big(x_1x_2 - y_1y_2\ ,\ x_1y_2 + x_2y_1\big)$

exemple

$$(0, 1).(0, 1) = (-1, 0)$$

on nomme $(0, 1) = i$ *où* i *est un nombre imaginaire qui se caractérise par l'équation* $i^2 = -1$

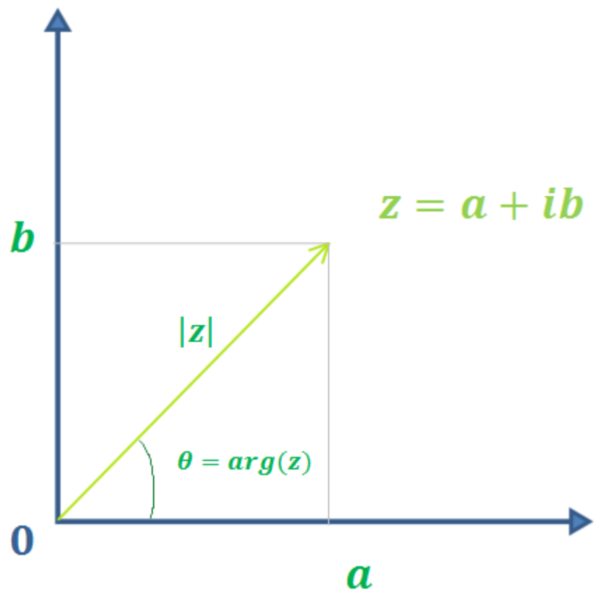
Le couple complexe (a, b) se note $(a, b) = a + ib$

Il existe une coïncidence entre $\mathbb{R}$ et l'ensemble des complexes de partie imaginaire nulle. En clair un nombre complexe avec une partie imaginaire nulle (i.e. $bi = 0$) est considérée comme un réel.

On appelle le conjugué d'un nombre complexe (a, b) le complexe : $(a, b)^* = a - ib$

Le module d'un nombre complexe (a, b) se note :

$$|(a, b)|^2 = a^2 + b^2 = (a, b)(a, b)^* = (a + ib)(a - ib)$$



Correspondance entre $\mathbb{C}$ et le plan

Forme polaire

Pour alléger l'écriture, on a l'habitude de poser

$$\rho = |z| = \mathrm{OM} = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)}$$

$$\theta = \arg(z) \text{ solution de } \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{Re}(z) & = & |z|.cos(\theta) \\ \mathrm{Im}(z) & = & |z|.sin(\theta) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl} a + ib & = & \rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta) \\ & = & \rho\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big) \quad = \quad \rho \mathrm{e}^{i\theta} \end{array}$$

Formule de de Moivre [1]

$$\begin{aligned}
z &= \rho \mathrm{e}^{i\theta} \\
z^n &= \rho^n \mathrm{e}^{in\theta} \\
z^n &= \rho^n \big(\cos(\theta) + i \sin(\theta)]big)^n \\
z^n &= \rho^n \big(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]big)
\end{aligned}$$

Équations algébriques dans $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
lcl z^n - a &= 0 \\
z^n &= a \\
z^n &= \rho^n \mathrm{e}^{in\theta} = \rho_a \mathrm{e}^{in\theta} \\
\Leftrightarrow \rho^n &= \rho_a \text{ dans } \mathbb{R} \\
n\theta &= \theta_a + 2k\pi \text{ dans } \mathbb{R} \text{ (avec } k \in \mathbb{Z}) \\
\Leftrightarrow \rho &= \sqrt{n}\rho_a \text{ et } \theta = \frac{\theta}{n} + \frac{k}{n} 2\pi
\end{aligned}$$

1.2 Définitions des principales notions en Analyse

Définition : *z est au **delta-voisinage** de z_0 si $\{z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| < \delta\}$. On appelle le delta-voisinage pointé de z_0 la condition suivante $\{z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |z - z_0| < \delta\}$*

Définition : *on dit que z_0 est un **point limite** (aussi appelé point d'accumulation) d'un ensemble $S \subset \mathbb{C}$ si tout δ voisinage de z_0 contient des points de S.*

$$\forall \delta \in \mathbb{R}_+^* , \exists z \in S \textit{ tel que } |z - z_0| < \delta \textit{ et avec } z \neq z_0$$

Définition : *Un ensemble de points est dit **fermé** si et seulement si tous les points d'accumulation de S est un point de S.*
exemple : $S = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1\}$

Définition : *Un ensemble **borné** se caractérise par :*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \textit{ tel que } \forall z \in S|z| < M$$

1. Abraham de Moivre (né le 26 mai 1667 à Vitry-le-François - mort le 27 novembre 1754 à Londres) est un mathématicien français. De Moivre était un précurseur du développement de la géométrie analytique et de la théorie des probabilités. C'est en 1707 qu'il trouva cette formidable formule que l'on retrouve aujourd'hui en Géométrie et en Analyse.

Définition : *Un ensemble S est **compact** si et seulement s'il est fermé* ET *borné.*

Définition : *On dit que z_0 est **intérieur** à S si et seulement s'il existe un δ-voisinage de z_0 dont tous les points appartient à S.*

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \forall z \in \mathbb{C} \ \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow z \in S$$

Définition : *On dit que z_0 est **extérieur** à S si et seulement s'il existe un δ-voisinage de z_0 dont aucun des points n'appartient à S.*

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \forall z \in \mathbb{C} \ \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow z \notin S$$

Définition : *On dit qu'un point est un point **frontière** si tout δ-voisinage de z_0 contient à la fois des points de S et des points n'appartenant pas à S.*

$$\forall \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \ \exists z_1 \in S \text{ et } z_2 \notin S \text{ tel que } |z_1 - z_0| < \delta \text{ et } |z_2 - z_0| < \delta$$

Définition : *Un ensemble S est **ouvert** si et seulement si il ne possède que des points intérieurs.*

Définition : *Un ensemble est dit **connexe** si et seulement si on peut relier deux points quelconques de cet ensemble par un chemin polygonal entièrement contenu dans cet ensemble.*

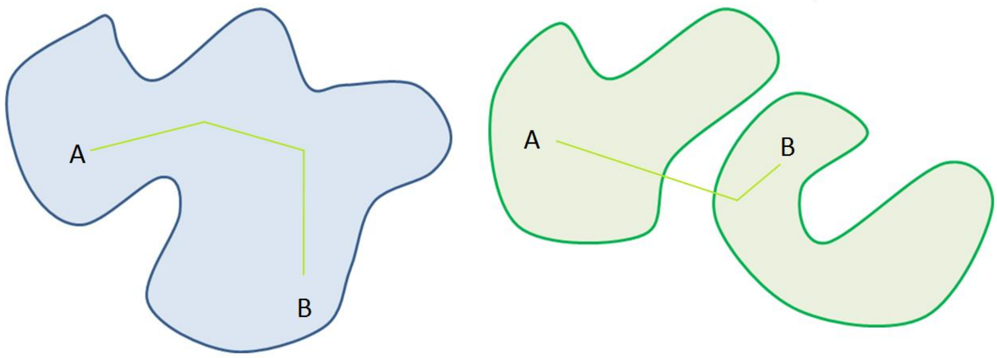


FIGURE 1.1: L'ensemble de gauche est connexe, celui de droite n'est pas connexe, car pour joindre le point A au point B, il faut sortir de l'ensemble.

Théorème de Bolzano Weirstrass
Tout ensemble infini et borné possède au moins un point d'accumulation. [2]

2. Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (5 octobre 1781 – 18 décembre 1848) est un mathématicien, logicien, philosophe, théologien bohémien de langue et de culture allemandes, fils d'un Italien émigré à Prague. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, habituellement appelé Karl Weierstrass, né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde (Westphalie), mort le 19 février 1897 à Berlin, était un mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895.

1.3 Définitions pour l'Analyse Complexe

On définit la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $z \mapsto w = f(z)$.
Définition : *Si w est unique, on dit que la fonction f est* UNIFORME. *Si w est multiple on dit alors que la fonction est* MULTIFORME.

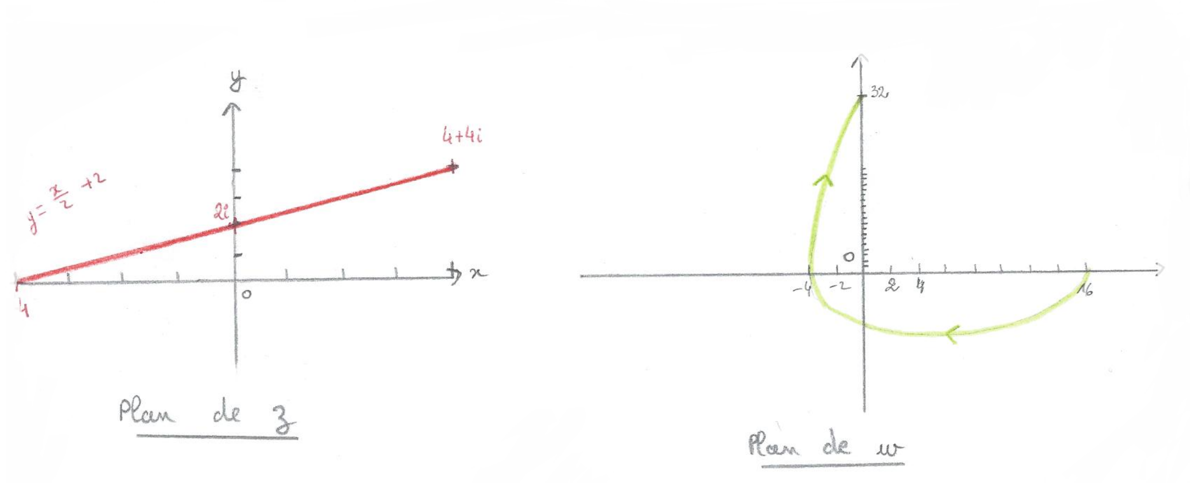
exmeple :

$$w = z^2 \to \text{ ici nous retrouvons une fonction uniforme .}$$

$$w = z^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \; w \text{ est solution de } w^2 = z \to \text{ la fonction est multiforme, il y a 2 solutions .}$$

$$w = \begin{cases} \sqrt{|z|}\mathrm{e}^{i\arg(z)/2} \\ \sqrt{|z|}\mathrm{e}^{i(\frac{\arg(z)}{2}+\pi)} \end{cases}$$

Une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définit également une transformation. Prenons comme exemple la fonction $w = z^2$. En posant $z = x+iy$ et $w = u+iv$, nous obtenons par identification $u = x^2 - y^2$ et $v = 2xy$. Sur le dessin ci-dessous, nous pourrons voir la transformation de cette fonction du plan z dans le plan w.



Définition : *On dit que f admet une limite L en z_0 si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \rho \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } |z - z_0| < \rho \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$

Nous allons maintenant aborder une notion importante de ce cours d'analyse : l'identification d'une fonction ANALYTIQUE [3]. On dit qu'une fonction est analytique si la notion de dérivée par rapport à z à un sens pour cette fonction. On a alors :

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z}$$

3. De nombreux mathématiciens se sont intéressé à ces fonctions. Parmi eux, nous pouvons citer de Moivre, Stirling, Euler, Gauss, Laplace, Poisson.

Les fonctions analytiques

Un malheur n'arrivant jamais seul, la fonction analytique doit également remplir les conditions de Cauchy-Riemann [4].

Posons donc $z = x + iy$, et P et Q sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $f(z)$ est analytique si et seulement si :

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

****

Démonstration : **Les conditions de Cauchy-Riemann**

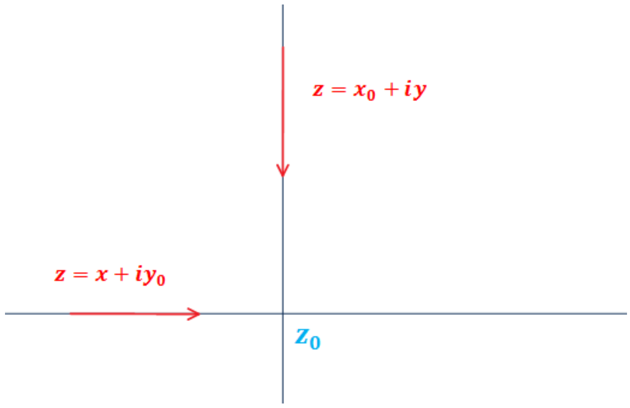
Les conditions de Cauchy-Riemann sont nécessaires pour qu'une fonction complexe soir dérivable.

$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \rho \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } |z - z_0| < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} - f'(z_0) \right| < \rho$$

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

avec $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$

1. Écrire $f'(z_0)$ en fonction de P, Q, x, y, x_0, y_0
2. Déterminer cette limite de deux façons différentes :
   - $z = x + iy_0$
   - $z = x_0 + iy$
3. Montrer que les conditions de Cauchy-Riemann sont nécessaires pour que ces limites soient identiques



4. Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français. Georg Friedrich Bernhard Riemann, né le 17 septembre 1826 à Breselenz, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, Italie, est un mathématicien allemand. Sous l'influence de Laplace, Cauchy présente dans le mémoire *Sur les intégrales définies* (1814) la première écriture des équations de Cauchy-Riemann comme condition d'analyticité pour une fonction d'une variable complexe.

1) On utilise l'expression de la limite dans laquelle on remplace $f(z)$ par son expression polynomiale.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{P(x_0, y_0) - P(x, y) + i\big(Q(x_0, y_0) - Q(x, y)\big)}{x_0 - x + i(y_0 - y)}$$

2) <u>1^{er} cas :</u> $z = x + iy_0$

$$f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x_0, y_0) - P(x, y_0)}{x_0 - x} + i \lim_{x \to x_0} \frac{Q(x_0, y_0) - Q(x, y_0)}{x_0 - x}$$

$$f'(z_0) = \qquad \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) \quad + i \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

<u>2^{eme} cas :</u> $z = x_0 + iy$

$$f'(z_0) = -i \lim_{y \to y_0} \frac{P(x_0, y_0) - P(x_0, y)}{y_0 - y} + \lim_{y \to y_0} \frac{Q(x_0, y_0) - Q(x_0, y)}{y_0 - y}$$

$$f'(z_0) = -i \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \quad + \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$$

3) La condition nécessaire pour que la limite de $f'(z_0)$ existe (et donc que la fonction f soit dérivable) est l'égalité des 2 expressions trouvées au-dessus :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

****

Définition : *Si la dérivée $f'(z)$ existe en tout point z d'un ensemble ouvert $\mathscr{R}$ alors f est dite analytique dans $\mathscr{R}$.*
f sera dite analytique au point z_0 si et seulement si il existe un voisinage de z_0 en tout point duquel $f'(z)$ existe.
Les conditions de Cauchy-Riemann sont des conditions nécessaires, mais non suffisante à l'existence de $f'(z)$. Cependant, si les dérivées partielles de P et Q sont continues sur l'ouvert $\mathscr{R}$ alors, les conditions de Cauchy-Riemann sont suffisantes.

Si f est analytique, P et Q satisfont les conditions de Cauchy-Riemann, on trouve alors les équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial^2 y} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 P}{\partial^2 y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 y} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 y} = 0$$

P et Q sont des fonctions harmoniques conjuguées. [5]

Les fonctions harmoniques conjuguées ont une propriété particulière, elles forment dans un plan, un *réseau* de courbes. On a donc :

$$P(x, y) = \alpha \in \mathbb{R}$$
$$Q(x, y) = \beta \in \mathbb{R}$$

$P(x, y)$ et $Q(x, y)$ définissent deux réseaux de courbes. La particularité est que ces deux réseaux se coupent perpendiculairement dans la plan.

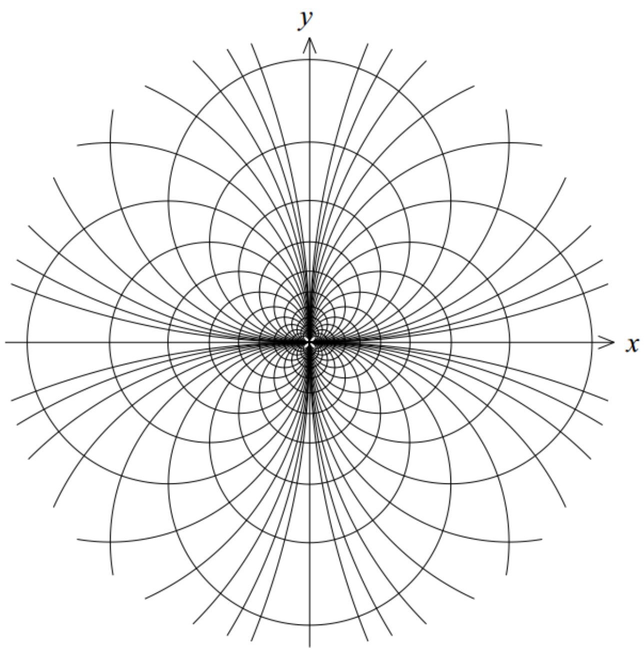


FIGURE 1.2: Exemple d'un réseau de courbes pour $f(z) = 1/z$ et avec $P = \alpha$ et $Q = \beta$

Si f est analytique, $f(z)$ est le résultat d'un calcul sur z et non pas d'un calcul qui passerait forcément par $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), |z|,$ ou $\overline{z}$. Les règles de dérivation d'une fonction analytique sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$, à savoir l'addition $(u + v)' = u' + v'$, la multiplication $(uv)' = u'v + uv'$, etc.

5. Vous remarquerez la similitude avec les équations de Laplace.

Quelques fonctions analytiques élémentaires

Polynômes $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$

Rationelles $f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$

avec $u(z)$ et $v(z)$ deux fonctions polynomiales de z C'est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ privé de $\{$ racines de $v(z)\}$. Les racines de $v(z)$ sont appelées les pôles de la fonction f.

Exponentielle Complexe On sait que pour $y \in \mathbb{R}$ $\mathrm{e}^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$.

Les formules d'Euler nous donnent :

$$\cos(y) = \frac{\mathrm{e}^{iy} + \mathrm{e}^{-iy}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(y) = \frac{\mathrm{e}^{iy} - \mathrm{e}^{-iy}}{2i}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z &= \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy} \\
\mathrm{e}^z &= \mathrm{e}^x\big(\cos(y) + i\sin(y)\big) \\
\mathrm{e}^z &= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\Big(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z))\Big)
\end{aligned}$$

$\mathrm{e}^{z+ik2\pi} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{ik2\pi} = \mathrm{e}^z$
donc e^z est périodique de période $T = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{K}$

Par extension nous pouvons en déduire les formes exponentielles suivantes :

$$\sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}$$

$$\mathrm{sh}(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2} \qquad \mathrm{ch}(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

Réciproque de l'exponentielle on s'en sert généralement pour résoudre des équations

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z &= A & &\text{avec } A \in \mathbb{C} \\
z &= x + iy & &\text{avec } A = \rho i\theta \\
\mathrm{e}^z &= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy} = \rho\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^x\big(\cos(y) + i\sin(y)\big) = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(\rho) \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

Par définition, $Log(z)$ est la réciproque de la fonction e^z. Attention cependant à ne pas le confondre avec la fonction $\log(z)$ qui est la fonction logarithmique de base 10. Ici $Log(z)$ représente la fonction réciproque, on la trouve ainsi :

$$Log(z) = \ln(|z|) + i(\arg(z) + 2k\pi)$$

~

1.4 Rappels sur les fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques

$$\sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}$$
$$\mathrm{sh}(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2} \qquad \mathrm{ch}(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

$$\cos(iz) = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2} = \mathrm{ch}(z)$$
$$\sin(iz) = \frac{\mathrm{e}^{-z} - \mathrm{e}^{z}}{2i} = \frac{i(\mathrm{e}^{-z} - \mathrm{e}^{z})}{2i^2} = i\mathrm{sh}(z)$$

$$\begin{cases} \cos(iz) = \mathrm{ch}(z) \\ \sin(iz) = i\mathrm{sh}(z) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{ch}(iz) = \cos(z) \\ \mathrm{sh}(iz) = i\sin(z) \end{cases}$$

Figures trigonométriques d'un complexe en partie réelle et imaginaire

Prenons le complexe $z = x + iy$ avec (x, y) deux réels. Nous pouvons exprimer les fonctions trigonométriques cos et sin ainsi :

$$\sin(z) = \sin(x + iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy)$$
$$\sin(z) = \sin(x)\mathrm{ch}(y) + i\cos(x)\mathrm{sh}(y)$$

De même pour le cosinus, on obtient :

$$\cos(z) = \cos(x)\mathrm{ch}(y) - i\sin(x)\mathrm{sh}(y)$$

Rappels

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

« L'erreur est humaine, seule la persévérance est diabolique ; l'idéal étant de ne pas persévérer dans l'erreur. » *Guy Cathebras*

~

Fonctions trigonométriques inverses

arcsin(z) : c'est la fonction qui donne TOUTES les solutions en Z de l'équation $\sin(Z) = z$. En conséquence, arcsin est multiforme.

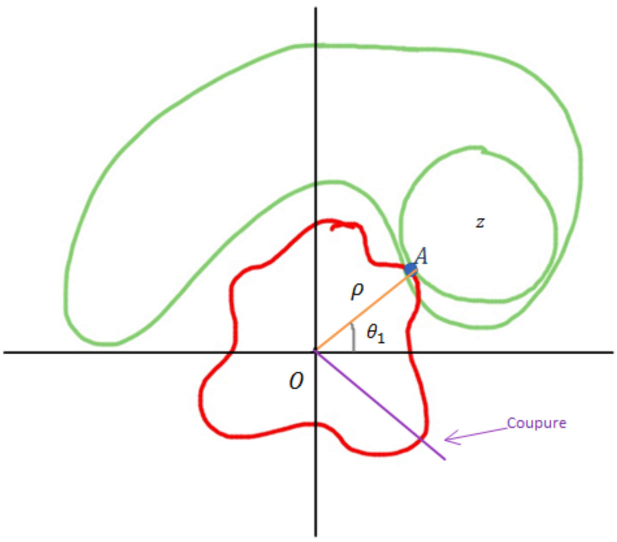
$\arccos(z), \arctan(z), \operatorname{argsh}(z), \operatorname{argch}(z), \operatorname{argth}(z)$: toutes ces fonctions sont multiformes ! Comme les fonctions trigonométriques sont des combinaisons linéaires de fonctions exponentielles, on en déduit que les fonctions trigonométriques inverses sont des combinaisons linéaires de la fonction *Log* (souvenez-vous, la fameuse fonction qui n'est ni le logarithme népérien, ni le logarithme de base 10 !).

$$\begin{aligned}
\arcsin(z) &= \frac{1}{i} Log\Big(iz + \sqrt{1-z^2}\Big) \\
\arccos(z) &= \frac{1}{i} Log\Big(z + \sqrt{z^2-1}\Big) \\
\arctan(z) &= \frac{1}{2i} Log\Big(\frac{1+iz}{1-iz}\Big) \\
\operatorname{argsh}(z) &= Log\Big(z + \sqrt{1+z^2}\Big) \\
\operatorname{argch}(z) &= Log\Big(z + \sqrt{z^2-1}\Big) \\
\operatorname{argtan}(z) &= \frac{1}{2} Log\Big(\frac{1+z}{1-z}\Big)
\end{aligned}$$

1.5 Notion de Singularité

En mathématiques, une singularité est en général un point, une valeur ou un cas dans lequel un certain objet mathématique n'est pas bien défini. C'est-à-dire qu'une singularité est un point où $f(z)$ n'est pas analytique. On appelle ces points des POINTS SINGULIERS. Considérons la fonction suivante :

$$f(z) = z^{1/2}$$



~

points de branchement et coupures : le point de branchement est le point commun à toutes les coupures d'une fonction. Ce n'est pas une singularité isolée, la fonction est multiforme, son extrémité est une coupure. Ici le point de branchement est l'origine

$$\begin{aligned} z_A = \rho \mathrm{e}^{i\theta_1} \quad &\rightarrow \quad f(z_A) = z_A^{1/2} = \sqrt{\rho}\mathrm{e}^{i\theta_1/2} \\ z_{A'} = \rho \mathrm{e}^{i(\theta_1+2\pi)} \quad &\rightarrow \quad f(z_{A'}) = (z_{A'})^{1/2} = \sqrt{\rho}\mathrm{e}^{i(\frac{\theta_1}{2}+\pi} \end{aligned}$$

points singuliers isolés : $z = z_0$ est un point singulier isolé si et seulement si il existe un voisinage de z_0 ne contenant aucun autre point singulier. Dans l'exemple ci-dessus, tous les points de coupure sont des points singuliers isolés.

pôles : on dit que z_0 est un pôle d'ordre n si et seulement si il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lim\limits_{z \to z_0} \big(z - z_0\big)^n f(z) = A \neq 0 \neq \infty$. Un pôle est une singularité isolée.

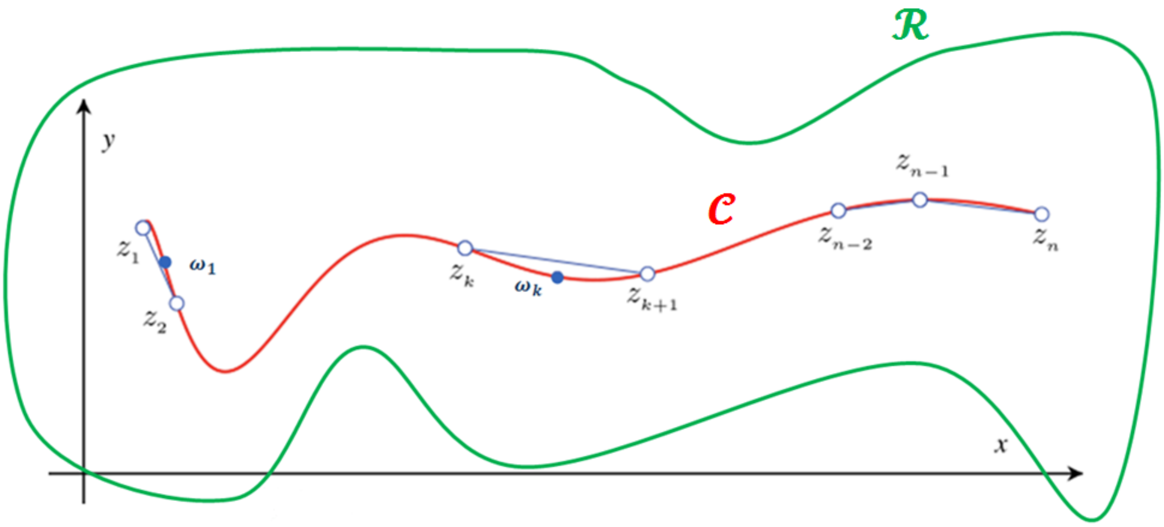
singularité supprimable $\lim\limits_{z \to z_0} \big(z - z_0\big)^n f(z) = A \neq \infty$. C'est une limite finie, la fonction est prolongeable par continuité en z_0.

singularité essentielle les points singuliers essentiels sont tous les autres point. La limite de $f(z)$ n'existe pas.

Chapitre 2

Intégration dans le domaine complexe

2.1 Intégrale curviligne



$f(z)$ est une fonction analytique sur l'OUVERT $\mathscr{R}$. La courbe $\mathscr{C}$ est inclue dans $\mathscr{R}$, mais attention, ce n'est PAS la représentation de la fonction f ! $f(z)$ est continue en tout point de $\mathscr{C}$.

Les points z_1 à z_n appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$. L'ensemble des ω_k sont également sur la courbe, et se trouvent sur l'intervalle $[z_{k-1}, z_k[$.

On a alors la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) f(\omega_k)$$

On nomme l'INTÉGRALE CURVILIGNE de $f(z)$ le long de la courbe $\mathscr{C}$ la limite suivante :

$$\lim_n S_n = \int_{\mathscr{C}} f(z) dz$$

Essayons maintenant de simplifier l'expression de cette intégrale à l'aide du module et de l'inégalité triangulaire [1].

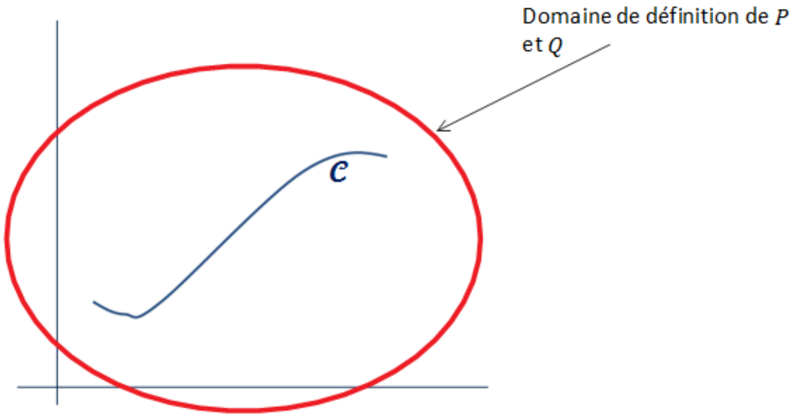
1. petit rappel de l'inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \times |f(\omega_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \times \sup_{k \in \mathscr{C}} |f(z)| \\ \left| \int_{\mathscr{C}} f(z)dz \right| &\leq L(\mathscr{C}) \times \sup_{z \in \mathscr{C}} |f(z)| \end{aligned}$$

Remarque : $\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$ tend vers la longueur de la courbe que l'on note ici $L(\mathscr{C})$.

2.2 Intégrale curviligne réelle

Soient P et Q, deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.



$$\int_{\mathscr{C}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

On ne dira jamais assez que l'intégrale ne dépend pas du chemin parcouru, mais seulement de ses extrémités. L'intégrale précédente n'est vraie que si cette quantité est une différentielle totale exacte.

Calcul

Si $\mathscr{C}$ est continuement différentiable, et si $\mathscr{C}$ est définie par :

$$\mathscr{C} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \ x = u(t); y = v(t) \ \mid t_1 \leq t \leq t_2 \right\}$$

$$dx = u'(t)dt$$

$$dy = v'(t)dt$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \Big(P\big(u(t), v(t)\big) u'(t) + Q\big(u(t), v(t)\big) v'(t) \Big) dt$$

Maintenant, nous alloins déterminer quelle est la relation entre l'intégrle curviligne réelle et complexe. Soit la fonction f suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z = x + iy &\mapsto f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \end{aligned}$$

Soit γ une courbe continue dans $\mathbb{C}$. Soit $I = \int_\gamma f(z)dz$. Posons $dz = dx + idy$.

Attention : la relation entre dx et dy est imposée par γ.
Exemple :

$$\gamma = \big\{ z = x + iy \in \mathbb{C} | W(x, y) = \alpha \big\}$$
$$\frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy = 0$$

$$I = \int_\gamma \Big(P(x, y) + iQ(x, y) \Big) \big(dx + idy \big)$$

$$\boxed{I = \int_\gamma P(x, y)dx - Q(x, y)dy + i \int_\gamma Q(x, y)dx + P(x, y)dy}$$

Une intégrale curviligne complexe est donc composée :
- d'une partie réelle donnant lieu à une intégrale curviligne réelle
- d'une partie imaginaire donnant lieu à une intégrale curviligne réelle

2.3 Propriétés des intégrales dans $\mathbb{C}$

2.3.1 Linéarité

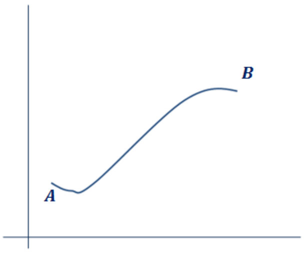
$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \qquad \int_\gamma \Big(\lambda f(z) + \mu g(z) \Big) dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz$$

2.3.2 Sens de parcours et relation de Chasles [2]

$$\int_{\widehat{AB}} f(z)dz = - \int_{\widehat{BA}} f(z)dz$$
$$\int_{\widehat{AB}} f(z)dz = \int_{\widehat{AC}} f(z)dz + \int_{\widehat{CB}} f(z)dz$$
$$\Big| \int_\gamma f(z)dz \Big| \leq \sup_{z \in \gamma} |f(z)| \times L(\gamma)$$

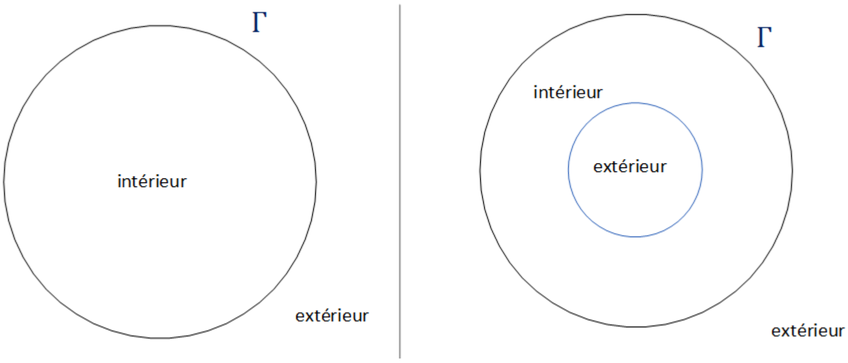
Il faut retenir les méthodes de majoration des modules de l'intégrale, nous en ferons une consommation immodérée.

2. Michel Chasles (15 novembre 1793 - 18 décembre 1880) était un mathématicien français. On lui doit d'important travaux en géométrie projective. Il reçut la prestigieuse médaille *Copley* en 1865.



2.3.3 Cas particulier d'un lacet fermé

On l'appelera "contour", c'est une boucle.



2.3.4 Formule de Green-Riemann [3]

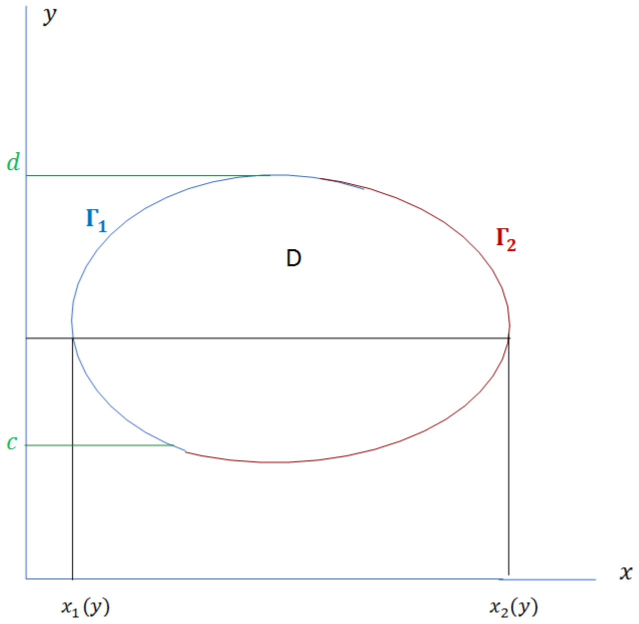
Soit un domaine D de $\mathbb{R}^2$ délimité par un contour Γ. Soient deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ que l'on nommera $P(x,y)$ et $Q(x,y)$.
L'objectif est de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

$$I = \int_c^d \Big(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \Big) dy$$

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} = [Q(x,y)]_{x_1(t)}^{x_2(t)} = Q\big(x_2(y),y\big) - Q\big(x_1(y),y\big)$$

3. George Green (juillet 1793 - mai 1841) était un physicien britannique. Il est l'auteur de *Essai sur l'application de l'analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme* en 1828. George Green n'a passé qu'une seule année à l'école dans son enfance. Il apprit les mathémtiques seul dans le moulin de son père dont il avait hérité en 1829. Il intégra l'Université de Cambridge en tant qu'étudiant en 1833 à l'âge de 40 ans, il en sort diplômé 4 ans plus tard.



Γ_1 et Γ_2 représentent respectivement les courbes $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

$$I = \int_c^d \Big(Q\big(x_2(y,)y\big) - Q\big(x_1(y),y\big)\Big)dy = \int_c^d Q\big(x_2(y),y\big)dy - \int_c^d Q\big(x_1(y),y\big)dy$$

$$I = \int_{\Gamma_2} Q(x,y)dy - \int_{\Gamma_1} Q(x,y)dy$$

$$I = \int_{\Gamma_2} Q(x,y)dy + \int_{-\Gamma_1} Q(x,y)dy$$

D'où finalement :

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int_\Gamma Q(x,y)dy$$

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int_\Gamma P(x,y)dx$$

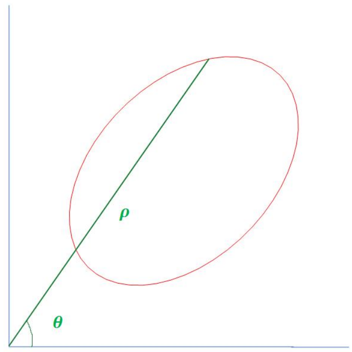
La formule de Green-Riemann se retrouve en soustrayant les deux équations précédentes :

$$\iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy = \int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

****

Applications

Calcul d'une aire plane



$$P(x,y) = -y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$
$$Q(x,y) = x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$\int_\Gamma xdy - ydx = \iint_D (1-(-1))dxdy = 2\iint_D dxdy$$
$$\text{Aire de } D = \tfrac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx$$

Coordonnées polaires

$$x = \rho\cos(\theta) \Rightarrow dx = \cos(\theta)d\rho - \rho\sin(\theta)d\theta$$
$$y = \rho\sin(\theta) \Rightarrow dy = \sin(\theta)d\rho + \rho\cos(\theta)d\theta$$

Aire du domaine :

$$D = \frac{1}{2}\int_\Gamma \Big(\rho\cos(\theta)\sin(\theta)d\rho + \rho^2\cos(\theta)^2 d\theta - \rho\cos(\theta)\sin(\theta)d\rho + \rho^2\sin(\theta)^2 d\theta\Big)$$
$$\mathscr{A}(D) = \frac{1}{2}\int_\Gamma \rho^2 d\theta$$

Exemple d'application : l'aire d'un disque

On donne Γ un cercle de centre O l'origine, et de rayon R. En coordonnées polaires, nous avons ρ et θ variant de 0 à 2π.

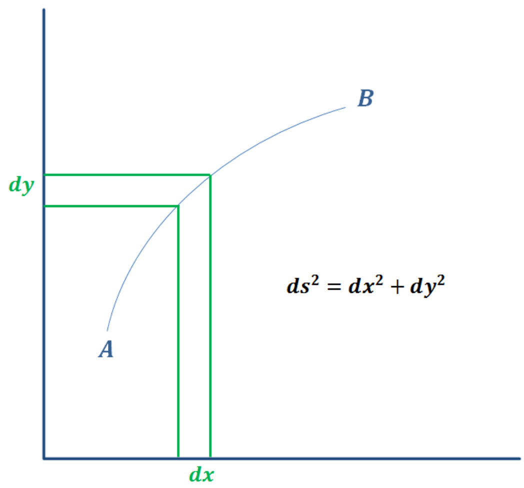
$$\mathscr{A}(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2 d\theta = \frac{R^2}{2}[2\pi]_0^{2\pi} = \pi r^2$$

****

2.3.5 Calcul de longueur d'arc

Nous avons un arc de A à B.

$$L(\Gamma) = \int_\Gamma dS = \int_\Gamma \sqrt{dx^2 + dy^2}$$



<u>3 cas de calculs différents pour la longueur d'arc :</u>

Cas $n°1$

γ est défini comm la courbe représentative d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\gamma = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x)\Big\}$$

$$dy = f'(x)dx \Rightarrow dx^2 + dy^2 = (1 + f'(x)^2)dx$$

$$L(\gamma) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Cas $n°2$ Coordonnées paramétriques

$$\gamma = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = x(t)\ ;\ y = y(t)\ \ t \in [t_a; t_b]\Big\}$$

$$\Rightarrow dx = x'(t)dt \qquad \Rightarrow ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

$$dy = y'(t)dt$$

$$L(\gamma) = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

Cas $n°3$

$$\gamma = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = \rho(\theta)\cos(\theta)\ ;\ y = \rho(\theta)\sin(\theta)\ \ \theta \in [\theta_a; \theta_b]\Big\}$$

$$\Big(\rho(\theta)\cos(\theta)\Big)' = \rho(\theta)\cos(\theta) - \rho(\theta)\sin(\theta) \tag{2.1}$$

$$\Big(\rho(\theta)\sin(\theta)\Big)' = \rho(\theta)\sin(\theta) + \rho(\theta)\cos(\theta) \tag{2.2}$$

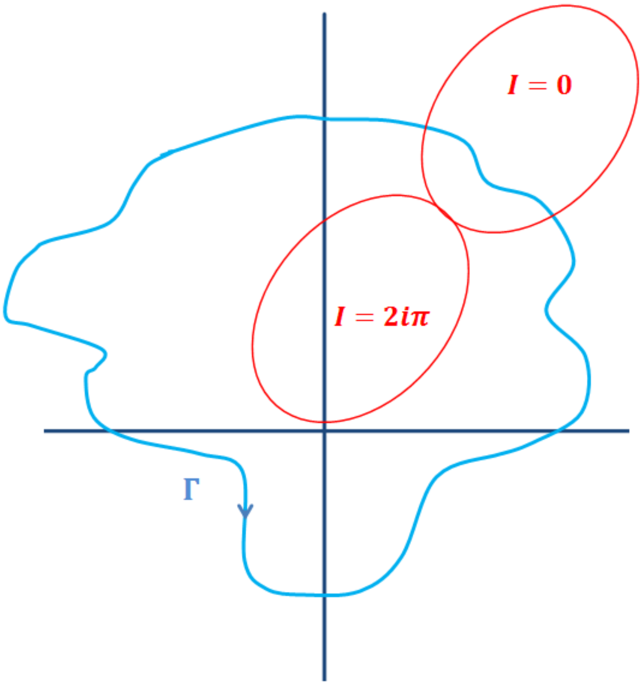
$$(1.1)^2 \qquad = \rho'(\theta)^2\cos(\theta)^2 + \rho(\theta)^2\sin(\theta)^2 - 2\rho(\theta)\rho'(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$(1.2)^2 \qquad = \rho'(\theta)^2\sin(\theta)^2 + \rho(\theta)^2\cos(\theta)^2 + 2\rho(\theta)\rho'(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$
\begin{aligned}
(1.1)^2 + (1.2)^2 \quad &= \rho'(\theta)^2 + \rho(\theta) \\
L(\gamma) = \int_{\theta_a}^{\theta_b} &\sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)}\, d\theta
\end{aligned}
$$

2.3.6 Problème fondamental

Nous allons chercher à calculer l'intégrale d'une fonction z^n sur un contour fermé quelconque entourant UNE fois l'origine.



$$\int_\Gamma z^n dz$$

On pose $z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow$
$$
\begin{aligned}
z^n &= \rho^n e^{in\theta} \\
dz &= e^{i\theta} d\rho + i\rho e^{i\theta} d\theta
\end{aligned}
$$

$$I = \int_\Gamma \rho^n e^{in\theta}\left(e^{i\theta} d\rho + i\rho e^{i\theta} d\theta\right) = \int_\Gamma \rho^n e^{i(n+1)\theta} d\rho + i\rho^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

Cas général $n \neq -1$

$$I = \int_\Gamma \rho^n e^{i(n+1)\theta} d\rho + i\rho^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

La formule de Green-Riemann pour l'intervalle curviligne marche aussi bien en coordonnées polaires que cartésiennes (*cf* Annexe B).

$$I = \int_\Gamma P(\rho,\theta)d\rho + Q(\rho,\theta)d\theta$$
$$I = \iint_\Delta \Big(\frac{\partial Q}{\partial \rho} - \frac{\partial P}{\partial \theta}\Big)d\rho d\theta$$

$$Q(\rho,\theta) = i\rho^{n+1}\mathrm{e}^{i(n+1)\theta} \qquad \tfrac{\partial Q}{\partial \rho} = i(n+1)\rho^n\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}$$

$$P(\rho,\theta) = \rho^{n}\mathrm{e}^{i(n+1)\theta} \qquad \tfrac{\partial P}{\partial \theta} = i(n+1)\rho^n\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}$$

En conclusion, nous obtenons $\forall n \neq -1, I = 0$.

CAS PARTICULIER $n = -1$

On trouve donc $I = \int_\Gamma \frac{d\rho}{\rho} + id\theta$

Nous considérons maintenant la fonction $\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C}\text{telque}z = \rho(\theta)\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ continue et $2\pi-$priodique. Le long de Γ_1, on peut alors écrire $dz = \big(\rho'(\theta)\mathrm{e}^{i\theta} + i\rho(\theta)\mathrm{e}^{i\theta}\big)d\theta$. Pour faire le tour de l'origine, il faut faire varier θ de 0 à 2π.

$$I = \int_{\Gamma_1}\frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi}\frac{\rho'(\theta)\mathrm{e}^{i\theta} + i\rho(\theta)\mathrm{e}^{i\theta}}{\rho(\theta)\mathrm{e}^{i\theta}}d\theta$$
$$I = \int_0^{2\pi}\big(\frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)} + i\big)d\theta$$
$$I = \Big[\ln|\rho(\theta)| + i\theta\Big]_0^{2\pi} = \int_{\Gamma_1}\frac{dz}{z} = i2\pi$$

$$\boxed{I = \int_{\Gamma_1}\frac{dz}{z} = i2\pi}$$

Remarque : *Nous pouvons généraliser cette formule avec $I = i2k\pi$, avec k le nombre de tours autour de l'origine. Par exemple, si $k = 3$, la fonction effectue 3 tours, nous trouvons donc $I = i6\pi$. Et si la fonction fait un tour en sens inverse, on a alors $k = -1$, d'où $I = -i2\pi$.*

2.4 Théorème de Cauchy

f est une fonction analytique dans un ouvert simplement connexe contenant entièrement un contour Γ avec Γ qui délimite un domaine D.

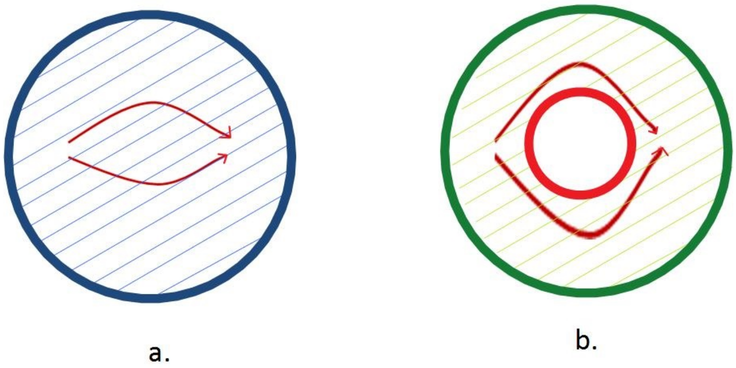


FIGURE 2.1: Le cas a) est simplement connexe. Le cas b) est multiplement connexe, car on ne peut pas passer d'un chemin à un autre sans sortir de l'ouvert

Mais qu'est-ce qu'un ouvert simplement connexe ? Ci-dessous se trouve une explication rapide.

« Dans un ouvert multiplement connexe, il y a des trous. » définition terre à terre de *Guy Cathebras*.

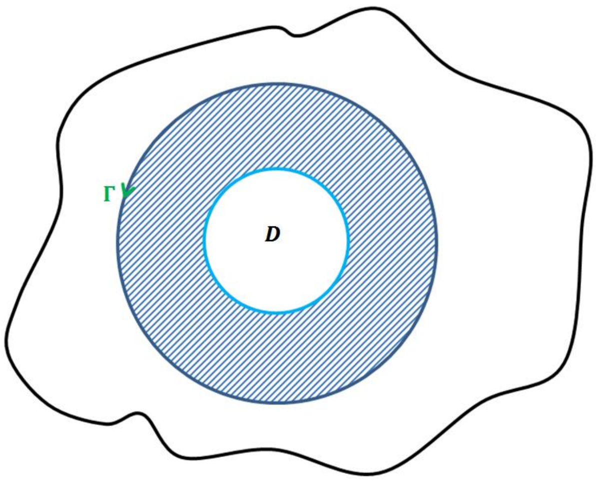


FIGURE 2.2: $\int_\Gamma f(z)dz$

Posons $z = x + iy$ et $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$
$dz = dx + idy$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= \int_\Gamma P(x,y)dx - Q(x,y)dy \quad + i\int_\Gamma P(x,y)dy + Q(x,y)dx \\ &= \iint_D \Big(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)dxdy \quad + i\iint_D \Big(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\Big)dxdy\end{aligned}$$

Si $f(z)$ est analytique sur D, nous retrouvons à l'aide des conditions de Caychy-Riemann les expressions suivantes :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

L'intégrale sur un contour fermé Γ d'une fonction analytique sur Γ et à l'intérieur de Γ est nulle :

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Conséquence :

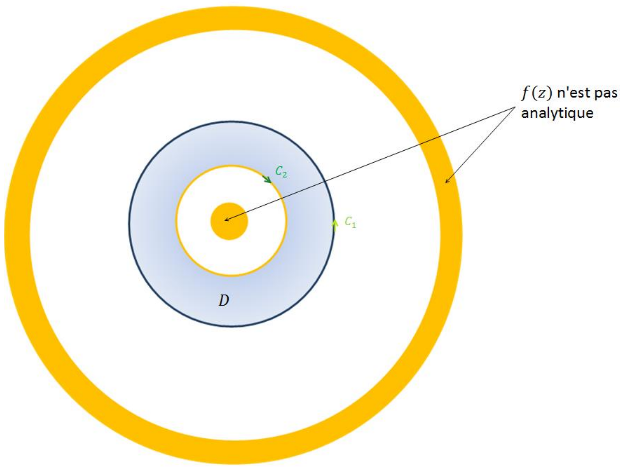


FIGURE 2.3: D est le domaine qui délimite où la fonction est analytique. En dehors des zones orange, la fonction f est analytique.

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = 0 = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$
$$\int_{C_1} f(z)dz = -\int_{C_2} f(z)dz = \int_{-C_2} f(z)dz$$

Il faudra faire attention au sens de parcours.

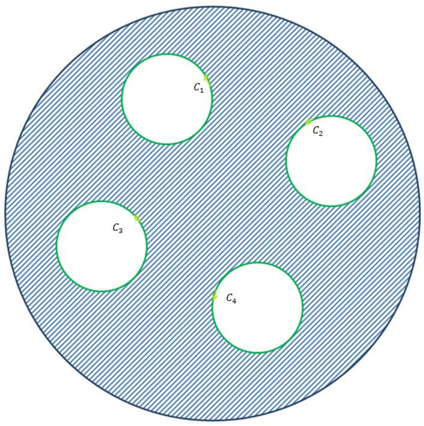


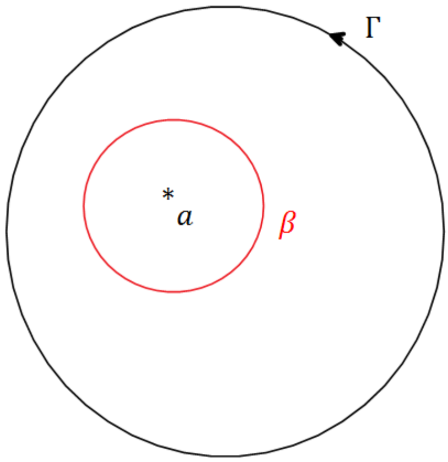
FIGURE 2.4: $f(z)$ est analytique sur $C_1, C_2, \ldots C_n$ et analytique en tout point de D.

$$\int_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(z)dz$$

Chapitre 3

Formules Intégrales de Cauchy

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur et à l'intérieur d'un contour Γ.



$$I(a) = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

Posons alors la fonction

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$$

g est une fonction analytique sur le domaine délimité par Γ privé de 0. Nous pouvons remarquer que $g(z)$ présente en a un pôle simple.

Soit β un cercle de centre a et de rayon δ.

$$\int_\Gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \int_\beta g(z)\,\mathrm{d}z = I(a)$$

$$I(a) = \int_\beta \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_\beta \frac{f(z)-f(a)+f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

$$I(a) = \int_\beta \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z + \int_\beta \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

$$\int_\beta \frac{f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z = f(a)\int_\beta \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = f(a)\int_\beta \frac{\mathrm{d}w}{w}$$

$$w = z - a \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}w = \mathrm{d}z$$
$$\int_\beta \frac{f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z = i2\pi f(a)$$

$$\int_\beta \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

On rappelle que β est le cercle de centre a et de rayon δ.

$$\left|\int_\beta \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z\right| \leq \sup_{z\in\beta}\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| \times L(\beta)$$

$L(\beta)$ représente la longueur du cercle β, autrement dit la circonférence du cercle :

$$L(\beta) = 2\pi R_\beta = 2\pi\delta$$

de plus, on sait que $|z-a| = \delta$

$$\left|\int_\beta \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z\right| \leq \sup_{z\in\beta}|f(z)-f(a)| \times \frac{2\pi\delta}{\delta} = 2\pi \sup_{z\in\beta}|f(z)-f(a)|$$

En faisant tendre δ vers 0, on obtient :

$$\left|\int_\beta \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z\right| \leq 0$$
$$\Rightarrow \int_\beta \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 0$$

Finalement, on obtient la formule suivante :

$$\boxed{\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = i2\pi f(a)}$$

3.1 Généralités

3.1.1 Dérivée de l'intégrale de Cauchy

$$f'(a) = \lim_{b\to a}\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

a et b appartenant au domaine délimité par Γ, on a :

$$f'(a) = \lim_{b\to a}\frac{\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-b}\,\mathrm{d}z}{a-b}$$
$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi}\lim_{b\to a}\int_\Gamma \frac{f(z)}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)\,\mathrm{d}z$$

Or $\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} = \frac{z-b-z+a}{(z-a)(z-b)} = \frac{a-b}{(z-a)(z-b)}$

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{b\to a} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, \mathrm{d}z$$

On peut faire tendre b vers a sans aucuns problèmes, on peut même remplacer b par a. Ce qui nous revient au final :

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, \mathrm{d}z$$

3.1.2 dérivée seconde et *n-ième* de l'intégrale de Cauchy

$$f''(a) = \lim_{b\to a} \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}$$
$$f''(a) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{b\to a} \int_\Gamma \frac{f(z)}{a-b} \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{(z-b)^2} \right) \mathrm{d}z$$

Or, nous savons que $\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{(z-b)^2} = \frac{(a-b)(2z-(a+b))}{(z-a)^2(z-b)^2}$
d'où finalement, l'expression de la dérivée seconde :

$$f''(a) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{b\to a} \int_\Gamma \frac{(2z-(a+b))f(z)}{(z-a)^2(z-b)^2}\, \mathrm{d}z$$
$$f''(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{2(z-a)f(z)}{(z-a)^4}\, \mathrm{d}z$$
$$f''(a) = \frac{2}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^3}\, \mathrm{d}z$$

Pour généraliser, nous allons chercher à déterminer quelle est la forme de la dérivée *n-ième* de la fonction f.

$$E = \lim_{b\to a} \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{(z-a)^n} - \frac{1}{(z-b)^n} \right) = \lim_{b\to a} \frac{1}{a-b} \left(\frac{(z-b)^n - (z-a)^n}{(z-a)^n(z-b)} \right)$$

Rappelons maintenant de cette équation :

$$X^n - Y^n = (X-Y) \sum_{k=1}^{n} X^{n-k} Y^{k-1}$$

$$E = \lim_{b\to a} \frac{1}{a-b} \frac{(a-b) \sum\limits_{k=1}^{n} (z-b)^{n-k}(z-a)^{k-1}}{(z-a)^n(z-b)^n}$$
$$E = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (z-a)^{n-k}(z-a)^{k-1}}{(z-a)^{2n}} = \frac{n(z-a)^{n-1}}{(z-a)^{2n}} = \frac{n}{(z-a)^{n+1}}$$

D'où finalement :

$$f^{(3)}(a) = \frac{2}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{3f(z)}{(z-a)^4}\,\mathrm{d}z$$
$$f^{(4)}(a) = \frac{2\times 3}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{4f(z)}{(z-a)^5}\,\mathrm{d}z$$

Nous pouvons donc maintenant généraliser et nous obtenons la magnifique formule suivante pour la dérivée *n-ième* de f :

$$\boxed{f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z}$$

3.2 Conséquences

3.2.1 Les inégalités de Cauchy

Considérons une fonction analytique sur et à l'intérieur du cercle $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z-a| = r\}$

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2\pi} \left|\int_{\mathscr{C}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right|$$
$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2\pi} \times 2\pi r \sup_{z\in\mathscr{C}} \left|\frac{f(z)}{r^{n+1}}\right|$$

$$\boxed{\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{r^n} \sup_{z\in\mathscr{C}} |f(z)|}$$

3.2.2 Théorème de Liouville

Liouville [1] :

Toute fonction entière et bornée est constante

Considérons un point a le centre d'un cercle $\mathscr{C}$ et de rayon r.

$$\left|f'(a)\right| \leq \frac{1}{r} \sup_{z\in\mathscr{C}} |f(z)| \leq \frac{M}{r}$$

Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout z nous ayions $|f(z)| \leq M$.
Comme r peut être rendu aussi grand que l'on souhaite, on trouve : $f'(a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}$

1. Joseph Liouville (né en 1809 et décédé en 1882) était un mathématicien français. Liouville fonda en 1836 le *Journal de mathématiques pures et appliquées* qui demeure aujourd'hui une référence dans ce domaine. Il publia des textes dans de nombreux domaines des mathématiques, en géométrie différentielle, en topologie différentielle, mais surtout en analyse complexe.

3.2.3 Théorème de Gauss sur la valeur moyenne

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre a et de rayon r. f est une fonction analytique sur et à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}$. Nous avons donc :

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}} \frac{f(z)}{z-a} \,\mathrm{d}z$$

On pose $(z-a) = r\mathrm{e}^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad z = a + r\mathrm{e}^{i\theta}$

$$\mathrm{d}z = ri\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

On parcourt $\mathscr{C}$ en faisant varier θ de 0 à 2π.

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{f(a+r\mathrm{e}^{i\theta})}{r\mathrm{e}^{i\theta}} \left(ir\mathrm{e}^{i\theta}\right) \,\mathrm{d}\theta$$

Nous venons de passer d'une intégrale complexe à une intégrale réelle contenant des nombres complexes... je sais c'est subtil.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(a+r\mathrm{e}^{i\theta} \,\mathrm{d}\theta$$

$f(a)$ est la moyenne des valeurs de f sur le cercle $\mathscr{C}$.

3.3 Développement en série

Exercice Introductif

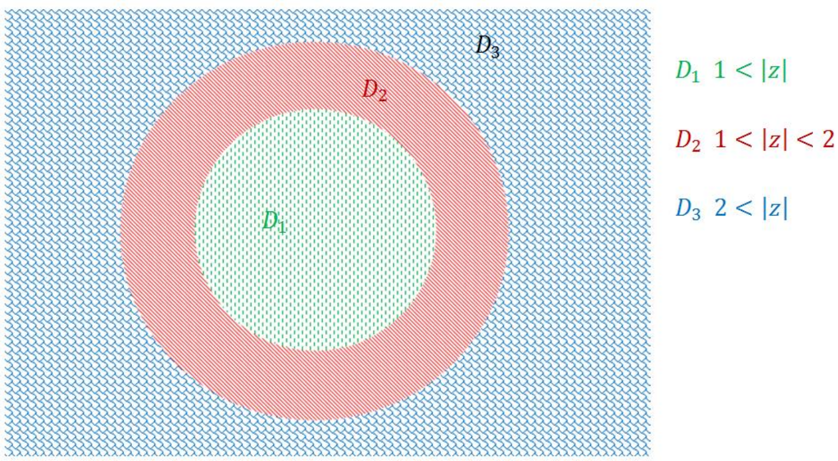
Rappel

Développement limité

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z^2 + z^3 + z^4 \cdots$$

Faire le développement en série pour les trois domaines suivants de :

$$\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$



Sur le 1^{er} **domaine** D_1

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{(-1)(1-z)} - \frac{(-1/2)}{1-\frac{z}{2}} \\
f(z) &= -(1+z+z^2+\cdots) + \frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots) \\
f(z) &= -1-z-z^2-z^3-\cdots+\frac{1}{2}+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}+\frac{z^3}{10}+\cdots \\
f(z) &= -\frac{1}{2}-\frac{3z}{4}-\frac{7z^2}{8}-\frac{15z^3}{16}-\cdots
\end{aligned}$$

Sur le 2^{me} **domaine** D_2

$$1 \leq |z| \leq 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} \leq \left|\frac{z}{2}\right| \leq 1$$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z} \times \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-z/2} \\
f(z) &= \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right) \\
f(z) &= \cdots+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}+\frac{z^3}{16}+\frac{z^4}{32}+\cdots
\end{aligned}$$

C'est le développement en série de Laurent [2] ; il se caractérise par la présence de puissance négative de z.

Sur le 3^{me} **domaine** D_3

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z} \times \frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{z} \times \frac{1}{1-2/z} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right) - \frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{8}{z^3}+\cdots\right) \\
f(z) &= -\frac{1}{z^2}-\frac{3}{z^3}-\frac{7}{z^4}-\cdots-\frac{2^n-1}{z^{n+1}}-\cdots
\end{aligned}$$

Nous retrouvons encore un développement en série de Laurent.

3.4 Suites et Séries de fonctions

Soit $u_1(z), u_2(z), \cdots u_n(z)$ une suite de fonctions définies et uniformes dans une région D de $\mathbb{C}$. On dit que $u_n(z)$ converge vers $U(z)$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\text{ tel que }\; n > N \Rightarrow |u_n(z) - U(z)| < \varepsilon$$

$U(z)$ est la limite de la suite $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$. En général, nous avons N dépendant de z.

2. Pierre Alphonse Laurent (1813 - 1854) est un mathématicien français connu pour la découverte des *séries de Laurent*. Cette recherche était contenue dans un mémoire soumis au Grand prix de l'Académie des Sciences en 1843, mais sa candidature étant trop tardive, l'article n'a jamais été inscrit au prix.

3.4.1 Le domaine de convergence

C'est l'ensemble des valeurs de z telles ue la suite converge.

3.4.2 Série de fonction

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z)$$

Une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que $S_n(z)$ converge vers $S(z)$ est que $U_k(z)$ converge vers 0.

3.4.3 Séries entières

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

De manière évidente, cette série converge vers a_0 pour $z = z_0$.
En général :

$$\begin{array}{ll} \exists R \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } & |z - z_0| < R \ \Rightarrow \text{serie converge} \\ & |z - z_0| > R \ \Rightarrow \text{serie diverge} \end{array}$$

R est le rayon de convergence. On appelle disque de convergence le disque D suivant :

$$D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| < R\}$$

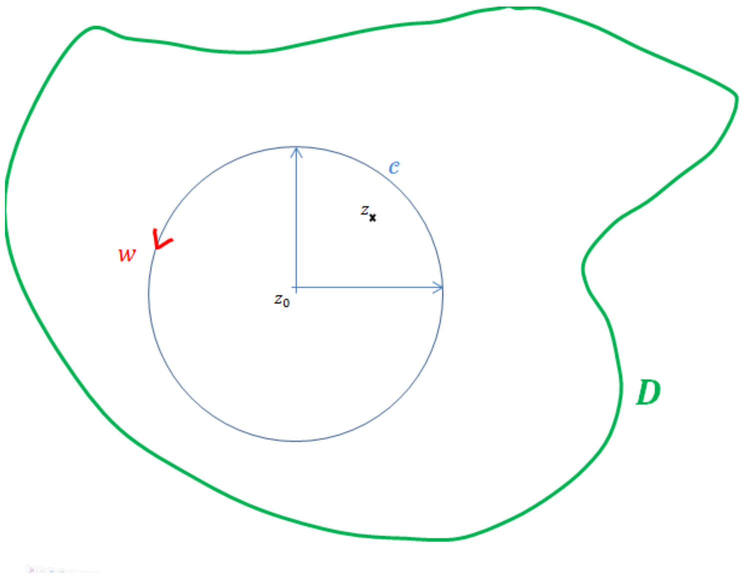
3.5 Théorèmes sur suites et séries

On pose ces théorèmes comme étant des axiomes, mais nous savons les démontrer [3].

1. la limite d'une suite est unique
2. une suite ou une série complexe est convergente si et seulement si la partie réelle ET la partie imaginaire convergent
3. la série entière :
   - converge uniformément et absolument sur son disque de convergence [4]
   - peut être dérivée terme à terme sur son disque de convergence
   - peut être intégrée terme à terme sur son disque de convergence
   - est continue et uniforme sur son disque de convergence

3.6 Développement en série de Taylor

- soit f une fonction analytique et uniforme dans un domaine D de $\mathbb{C}$
- soient z et z_0 deux points de D
- soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre z_0 et de rayon $\delta > |z - z_0|$



$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0} &= \frac{z-z_0}{(w-z)(w-z_0)} \\
\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)\frac{1}{w-z} \\
\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)\left(\frac{1}{w-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)\frac{1}{w-z}\right) \\
\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0} + \frac{z-z_0}{(w-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2}{(w-z)^2} \times \frac{1}{w-z} \\
\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0} + \frac{z-z_0}{(w-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2}{(w-z)^3} + \frac{(z-z_0)^3}{(w-z)^3} \times \frac{1}{w-z} \\
\frac{1}{w-z} &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}\right) + \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n} \times \frac{1}{w-z}
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant utiliser la 1ère formule intégrale de Cauchy :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z-z_0)^k}{2i\pi} \quad \int_{\mathscr{C}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}} \frac{(z-z_0)^n f(w)}{(w-z_0)^n (w-z)}\,\mathrm{d}w$$

Or

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

Donc

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z-z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0) \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}} \frac{(z-z_0)^n f(w)}{(w-z_0)^n (w-z)}\,\mathrm{d}wh$$

3. à vous de jouer !
4. l'absolue convergence implique la convergence

Si nous pouvons trouver à quelle condition $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(z) = 0$, nous aurons trouvé le domaine de convergence de la série entière. Pour cela, on pose :

$$X_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}} \frac{(z-z_0)^n f(w)}{(w-z_0)^n (w-z)}\,\mathrm{d}w$$

$$|X_n(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathscr{C}} \frac{(z-z_0)^n f(w)}{(w-z_0)^n (w-z)}\,\mathrm{d}w \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{w\in\mathscr{C}} \left(\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| \right)^n \frac{|f(w)|}{|w-z|} \times 2\pi\,\delta$$

avec

$$\frac{1}{|w-z_0|} = \delta$$

Or nous savons :

$$\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} = \gamma < 1$$

Par ailleurs, sur $\mathscr{C}$ nous avons $|f(w)| < M$; ainsi que $|w-z| = |w-z_0-(z-z_0)|$. On applique ensuite l'inégalité triangulaire, et nous obtenons :

$$||w-z_0| - |z-z_0|| \leq |(w-z_0)-(z-z_0)| \leq |w-z_0| + |z-z_0|$$

donc :

$$\delta - |z-z_0| \leq |w-z_0|$$

Finalement, nous trouvons :

$$\boxed{|X_n(z)| \leq \frac{\gamma^n M}{\delta - |z-z_0|}\,\delta \qquad \text{avec } \gamma < 1}$$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} |X_n(z)| = 0 \qquad \text{si } |z-z_0| \neq \delta$

Une fonction f analytique dans un domaine D est décomposable en série de Taylor autour de tout point z_0 de D.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)k$$

Cette série converge sur tout disque centré en z_0, entièrement contenu dans D.

Dans le cas d'une fonction méromorphe [5] le rayon de convergence est la distance de z_0 au point singulier le plus proche.

Exemple :

$$arctan(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots \qquad |z| < 1$$
$$arctant(z) = \frac{1}{2i} Log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

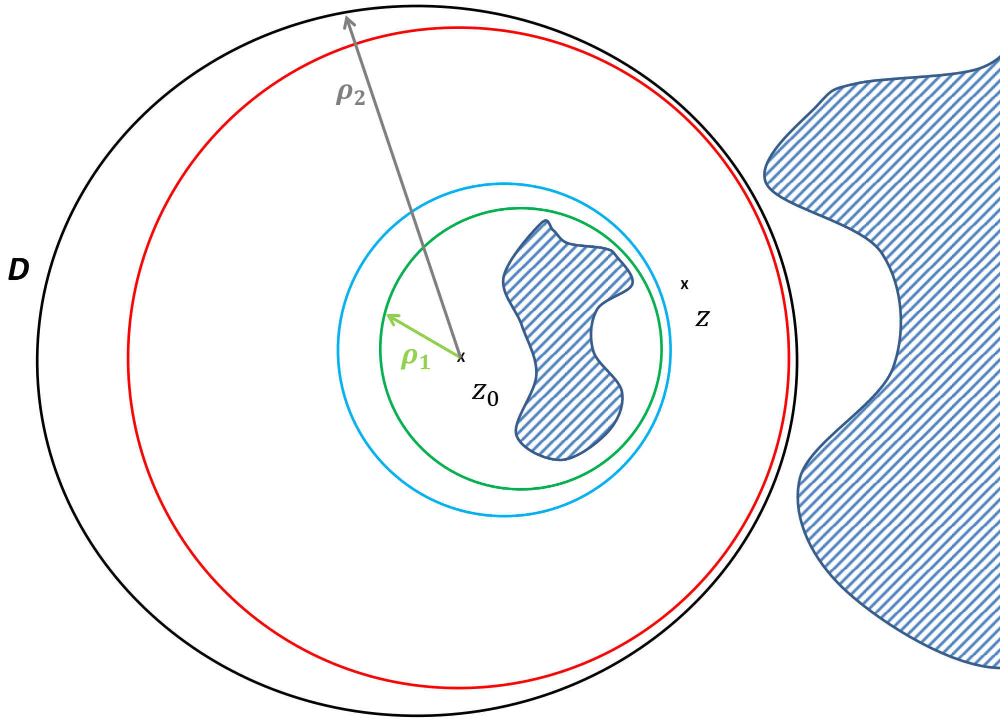
5. Une fonction méromorphe est une fonction analytique et uniforme sur un domaine D à l'exception d'un ensemble dénombrable de points singuliers isolés.

Un ensemble dénombrable est un ensemble qui peut être mis en bijection avec les réels (par exemple $\mathbb{R}$ est indénombrable tandis que $\mathbb{N}$ est dénombrable).

3.7 Séries de Laurent

f est analytique et uniforme dans une couronne circulaire D.

$$D = \{z \in \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$$



Nous allons considérer $\Gamma = \gamma_2 - \gamma 1$.

D'après Cauchy, nous avons : $\int_\Gamma f(z)dz = 0$
D'après la 1ère formule d'intégration de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w$$
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w$$
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{z - w} \, \mathrm{d}w$$

Rappel :

$$\frac{1}{w - z} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}} \right) + \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^n} \times \frac{1}{w - z}$$

$$\frac{1}{z-w} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(w-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\right) + \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^n} \times \frac{1}{z-w}$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (z-z_0)^k \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}w\right) + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{(z-z_0)^n f(w)}{(w-z_0)^n(w-z)}\,\mathrm{d}w$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}w = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} (w-z_0)^k f(w)\,\mathrm{d}w\right) + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{(w-z_0)^n f(w)}{(z-z_0)^n(z-w)}\,\mathrm{d}w$$

b Si $\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{(z-z_0)^n f(w)}{(w-z_0)^n(w-z)}\,\mathrm{d}w$ tend vers 0 si lorsque $|z-z_0| < \rho_2$ quand n tend vers $+\infty$.

Si $\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{(w-z_0)^n f(w)}{(z-z_0)^n(z-w)}\,\mathrm{d}w$ tend vers 0 si lorsque $|z-z_0| < \rho_1$ quand n tend vers $+\infty$.

En clair, ces deux quantités tendent vers 0 si $z \in D$ [6].

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{gamma_1} \frac{f(w)}{z-w} = \sum_{p=-\infty}^{-1} (z-z_0)^p \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{p+1}}\,\mathrm{d}w$$

On a effectué un changement de variable, nous avons donc maintenant : $p = -(k+1)$ d'où également $k = -(p+1)$.

On a alors :

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (z-z_0)^k \frac{1}{2i\pi}\int_g amma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}w$$

γ étant un contour, entièrement contenu dans la couronne D, entoure une fois z_0.

Remarque : f est analytique sur D (γ est un contour tracé dans D entourant une fois z_0), donc d'après Cauchy on a :

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z_0}\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z_0}\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_0}\,\mathrm{d}w$$

On a donc

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (z-z_0)^k \frac{1}{2i\pi}\int_g amma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}w$$

Soit :

$$f(z) = \underbrace{\cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{\text{partie principale}} \underbrace{+ a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots}_{\text{partie analytique}}$$

C'est donc le développement en série de Laurent, avec $a_k = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}w$.

6. *cf : 3.6 Développement en série de Taylor* pour la démonstration

Développons en série de Laurent autour d'un point singulier isolé (sur un disque épointé)

Soit f une fonction analytique et uniforme sur un domaine D à l'exception d'un point singulier isolé z_0.

- ⋆ si z_0 est un pôle d'ordre n : la partie principale du développement en série de Laurent possède EXACTEMENT n termes.
- ⋆ si z_0 est un point singulier supprimable : la partie principale du dévelopement en série de Laurent est NULLE.
- ⋆ si z_0 est un point singulier essentiel : la partie principale du dévelopement en série de Laurent est une INFINITÉ de termes non-nuls

3.8 Résidus

Soit f une fonction développée en série de Laurent sur un disque épointé (de centre z_0). Soit γ un contour entourant z_0.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi a_{-1} = 2i\pi Res(f, z_0)$$

On nomme a_{-1} le RÉSIDU DE LA FONCTION au point z_0 ; on le note $Res(f, z_0)$.

3.8.1 Théorème des Résidus

Soit f une fonction méromorphe dans un domaine D.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \left(2i\pi Res(f, z_k)\right)$$

3.8.2 Calculs pratique des résidus

Nous allons chercher des moyens simples pour calculer le terme a_{-1} du développement en série de Laurent autour d'un point singulier isolé.

[$\star$] si z_0 est un pôle simple

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

$$\lim z \to z_0 f(z) = \infty$$

$$\lim z \to z_0 (z - z_0) f(z) = a_{-1}$$

Si f est une fraction rationnelle, nous pouvons simplifier le calcul. Nous avons donc z_0 un pôle simple, le numérateur peut donc s'écrire $P(z)$ et le dénominateur $Q(z)$ avec $P(z_0) \neq 0$, et $Q(z) = (z - z_0)Q_1(z)$ et $Q_1(z) \neq 0$.

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q_1(z)} = \frac{P(z_0)}{Q_1(z_0)}$$

On a :

$$\begin{aligned} Q(z) &= (z - z_0)Q_1(z) \\ Q'(z) &= (z - z_0)Q_1'(z) + Q_1(z) \\ Q'(z_0) &= Q_1(z_0) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}}$$

[$\star$] si z_0 est un pôle multiple

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)}^n + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + \cdots$$

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + a_{-(n-1)} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \Big((z - z_0)^n f(z) \Big) = (n-1)! \times a_{-1} + \frac{n!}{1!} \times a_0(z - z_0) + \cdots$$

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \Big((z - z_0)^n f(z) \Big) \right) = (n-1)! \times a_{-1}$$

$$\boxed{\frac{1}{(n-1)!} \times \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \Big((z - z_0)^n f(z) \Big) \right) = a_{-1}}$$

[$\star$] si z_0 est un point singulier essentiel

Il n'y a pas de moyen systématique d'obtenir le résidu (ça ne veut pas dire que c'est difficile ! !). Il faut déterminer la série de Laurent.

exemple : $e^{1/z}$ autour de $z = 0$

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + w^3 3! + \frac{w^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \cdots$$

Annexe A

Construction d'une fonction analytique

Posons $P_1(x, y) = \mathrm{e}^{-x}(xsin(y) + ycos(y))$

1. A quelle condition $P_1(x, y)$ peut-elle être la partie réelle d'une fonction analytique de $z = x + iy$?
2. Vérifier cette condition
3. Construire une fonction P, semblable à P_1 qui vérifie la condition ci-dessus
4. Déterminer $Q(x, y)$ telle que $f(z = x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ soit analytique
5. Exprimer f en fonction de "z seulement".

1.

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} = 0$$

2. On ne peut pas construire une fonction analytique si la partie imaginaire et la partie réelle (donc ici P et Q) ne sont pas harmoniques !

$$\frac{\partial P_1}{\partial x}(x, y) = -\mathrm{e}^{-x}\big(xsin(y) + ycos(y)\big) + \mathrm{e}^{-x}sin(y)$$

$$= \mathrm{e}^{-x}\big(sin(y)(1 - x) - ycos(y)\big)$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}(x, y) = \mathrm{e}^{-x}\big(- sin(y)(1 - x) + ycos(y)\big) - \mathrm{e}^{-x}sin(y)$$

$$= \mathrm{e}^{-x}\big(sin(y)(x - 2) + ycos(y)\big)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\big(cos(y)(x+1) - ysin(y)\big)$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2}(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\big(sin(y)(-2-x) - ycos(y)\big)$$

On remarque que P_1 n'est pas harmonique, la condition n'est donc pas vérifiée. La fonction P_1 n'est pas analytique. Pour y remédier, nous allons changer légèrement cette fonction. Apparemment il n'y a qu'un problème de signe.

3. On pose $P(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\big(xsin(y) - ycos(y)\big)$. Après avoir refait le calcul des dérivées partielles de P, on obtient :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\big(sin(y)(x-2)\text{-}ycos(y)\big)$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2}(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\big(sin(y)(+2-x) + ycos(y)\big)$$

4. $$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

   Nous allons maintenant intégrer une de ces deux équations pour déterminer l'expression de Q. Mais attention, quand on intègre une dérivée, on obtient une fonction juste à UNE constante près ; mais dans le cas des dérivées partielles, cette constante est une fonction des autres variables (ici ce sera une fonction de x). Fainéant comme nous sommes, nous choisissons la facilité, on intègre la première expression.

$$P(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\Big(-cos(y) + ysin(y) + cos(y) + xcos(y)\Big) + constante$$

   N'oublions pas que $constante = g(x)$. Maintenant, on dérive pour déterminer $g(x)$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \mathrm{e}^{-x}\Big(cos(y) - ysin(y) - xcos(y)\Big) + g'(x)$$

   Par identification avec $-\frac{\partial P}{\partial y}$ on obtient $g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = K \in \mathbb{R}$

5. On cherche f de sorte qu'il ne s'exprime qu'avec z. Cette fonction est donc valable pour tout z et donc en particulier avec $z = x$ et $y = 0$.

$$f(z) = \mathrm{e}^{-x}\Big(xsin(y) - ycos(y)\Big) + i\text{–}\mathrm{x}\Big(xcos(y) + ysin(y)\Big) + iK$$

$$f(z) = i\mathrm{e}^{-x}(x) + iK$$

$$f(z) = iz\text{–}\mathrm{z} + iK$$

Annexe B

Formule de Green-Riemann en coordonnées cartésienens et polaires

Ce document annexe a été rédigé par *Guy Cathebras*. Vous pouvez retrouver ce document sur l'*Intranet*. Il s'agit de la formule de Green-Riemann déclinée en coordonnées cartésiennes et polaires.

1. Formule de Stokes-Ampères

Soit $\mathscr{C}$ une courbe fermée de l'espace. Soit S une surface, non fermée, s'appuyant sur $\mathscr{C}$ et soit $\overrightarrow{V(M)}$ un champ de vecteur.

On démontre et nous admettrons que la circulation de $\overrightarrow{V(M)}$ le long de $\mathscr{C}$ est égale au flux de son rotationnel à travers S. Ce qui s'écrit :

$$\int_C \overrightarrow{V(M)}.\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \iint_S \overrightarrow{rot}\overrightarrow{V(M)}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Dans cette expression, $\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \overrightarrow{T(M)}\mathrm{d}s$ où $\overrightarrow{T(M)}$ est le vecteur tangent unitaire à la courbe $\mathscr{C}$ au point M et $\mathrm{d}s$ est la différentielle de l'abscisse curviligne.

De son côté, $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est un vecteur normal à la surface S, dont la norme est égale à l'élément d'aire et dont la direction est fixée par le sens de parcours de la courbe $\mathscr{C}$ (c'est ce que l'on appelle la *règle du tire-bouchon*).

2. Formule de Green-Riemann en coordonées cartésiennes

Considérons dans un espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le cas où $\mathscr{C}$ et S sont entièrement contenues dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de même que le vecteur $\overrightarrow{V(M)}$. Posons :

$$\overrightarrow{V(M)} = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$$

D'où l'on tire immédiatement que :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{V(M)} = \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\Big)\vec{k}$$

Parce que l'on est en coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}x\,\vec{\imath} + \mathrm{d}y\,\vec{\jmath} + \mathrm{d}z\,\vec{k}$$

Parce que, de plus S est entièrement dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \vec{k}$$

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(M)}.\overrightarrow{\mathrm{d}M} &= P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y\\ \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{V(M)}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Et la formule de Stokes devient la formule de Green-Riemann :

$$\int_{\mathscr{C}} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

3. Formule de Green-Riemann en coordonées polaires

Considérons maintenant le cas où $\mathscr{C}$ et S sont définies en coordonées polaires, chaque point de l'espace étant repéré en coordonnées cylindriques par un triplé (ρ, θ, z). De la même façon que précédemment, posons :

$$\overrightarrow{V(M)} = U(\rho,\theta)\overrightarrow{u_r} + V(\rho,\theta)\overrightarrow{u_\theta}$$

D'où l'on tire immédiatement que :

$$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{V(M)} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho V)}{\partial \rho} - \frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\vec{k}$$

Parce que l'on est en coordonnées cylindriques, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}\rho\overrightarrow{u_r} + \rho\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

Parce que, de plus, S est entièrement dans le plan $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \rho\mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta\ \vec{k}$$

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(M)}.\overrightarrow{\mathrm{d}M} &= U(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho + \rho V(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta\\ \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{V(M)}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho V)}{\partial \rho} - \frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\rho\mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta\\ &= \left(\frac{\partial(\rho V)}{\partial \rho} - \frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Et la formule de Stokes devient la formule de Green-Riemann en coordonnées polaires :

$$\int_{\mathscr{C}} U(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho + \rho V(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta = \iint_S \left(\frac{\partial(\rho V)}{\partial\rho} - \frac{\partial U}{\partial\theta}\right) \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

Nous pourrions nous arrêter là. Posons cependant $W(\rho,\theta) = \rho V(\rho\theta)$. Nous voyons alors que :

$$\int_{\mathscr{C}} U(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho + W(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta = \iint_S \left(\frac{\partial W}{\partial\rho} - \frac{\partial U}{\partial\theta}\right) \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

C'est-à-dire que la même formule de Green-Riemann est applicable en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires !